УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ФОРМЕ ГАМИЛЬТОНА

Кафтарян Л.С., доцент, Борщенко Д.А., студентка, СумГУ, г. Сумы

Метод Лагранжа позволяет свести проблему движения любой механической системы к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\left(i=\overline{1,k}\right), \qquad (1)$$

где: k – число степеней свободы системы; $q_i, \dot{q}_i$ – соответственно обобщенные координата и скорость; Q_i – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i; T – кинетическая энергия системы.

Если действующие на систему силы потенциальные, то существует такая функция (потенциал сил или потенциальная энергия) $\Pi=\Pi(q_1,\ldots,q_k,t)$, что

$$Q_i=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\left(i=\overline{1,k}\right) \qquad (2)$$

Тогда уравнения Лагранжа (1) могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0 \text{ или}$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_i}\right]-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_i}=0,\left(i=\overline{1,k}\right) \qquad (3)$$

Равенство (3) справедливо потому, что потенциальная энергия зависит только от координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$, а от обобщенных скоростей не зависит и тогда $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}=0,\left(i=\overline{1,k}\right)$. Если ввести в рассмотрение функцию $L=T-\Pi$, то уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\left(i=\overline{1,k}\right) \qquad (4)$$

где: $L=T-\Pi$ – функция Лагранжа (или кинетический потенциал системы); $q_i, \dot{q}_i$ - переменные Лагранжа.

Таким образом, состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием функции Лагранжа.

Гамильтон предложил другой метод исследования системы, который приводит к интегрированию системы 2k дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения благодаря своей простоте и симметрии, получили название канонических уравнений. Можно предположить, что метод Гамильтона в силу свойств канонических уравнений является более сильным, чем метод Лагранжа.

Гамильтон для характеристики состояния системы использует обобщенные координаты $q_i\ \left(i=\overline{1,k}\right)$, а также обобщенные импульсы
$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ \left(i=\overline{1,k}\right)$, которые называются переменными Гамильтона. В рассмотрение вводится функция $H(q_1,\ldots,q_k,p_1,\ldots,p_k,t)$, определяемая равенством:

$$H=\sum_{i=1}^{k}p_i\dot{q}_i-L=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L \qquad (5)$$

С помощью функции (5) уравнения движения механической системы могут быть записаны в виде системы 2k дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \left(i=\overline{1,k}\right) \qquad (6)$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями механики или уравнениями Гамильтона, а функция $H(q,p,t)$ называется функцией Гамильтона.

Рассмотрены разные способы получения канонических уравнений Гамильтона, а также их использование при решении конкретных задач, например, случай стационарных связей, циклические координаты, определение обобщенных интегралов энергии.

Для нахождения интегралов канонических уравнений Гамильтона рассматривается метод, предложенный Якоби и Пуассоном. При этом используется понятие скобок Пуассона и их свойства.